Док-во Пусть $e_1 \dots e_m$ - базис L_1
Дополним его до базиса V

$$e_1 \dots e_m \; e_{m+1} \dots e_n$$

$$L_2 = \langle e_{m+1} \dots e_n \rangle$$

определяем L_2 таким образом

Глава 2. Линейные операторы.

§1. Линейные отображения.

Определение. Пусть V и W - векторные пространства размерности m и n над одним и тем же полем. Отображение $f: V \to W$ наз. линейным, если

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \sim \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Если $W = V$, то f наз лин. оператором.

примеры.

1) M_n - пр-во многочленов степени $\leq n$
$D: M_n \to M_n$
$Dp(t) = p'(t)$

2) M - пр-во всех многочленов
$Sp(t) = \int_0^t p(x)\,dx$

3) $V = L_1 \oplus L_2$
$p: V \to V$
$\forall x \in V \quad x = x_1 + x_2 \; ; \; x_1 \in L_1 \; ; \; x_2 \in L_2$
$px = x_1$ - оператор проектирования пр-ва V на L_1 параллельно L_2
$R: V \to V$
$Rx = x_1 - x_2$ - оператор отражения пр-ва V отн. L_1 параллельно L_2.

4) $O: V \to W$
$O(x) = 0$ нулевой оператор

5) $I: V \to V$
$Ix = x$ тождественный оператор

Свойства:

1. Всякое лин. отображение переводит нулевой вектор в нулевой

$$f(0_x) = f(\underset{\text{число}}{0} \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0_W$$

2. Лин. отображение сохраняет лин. комбинации

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k)$$

(док-во индукция по k)

3. Лин. отображение сохраняет лин. зависимость (т.е переводит лин. зависимую систему в лин. зависимую)

свойство 2 ⇒ для задания лин. отображения достаточно задать его только на базисных векторах $e_1 \dots e_n$ нек. базиса

На остальных - по линейности

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

Теорема

Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис пространства V, а $g_1 \dots g_n$ - произвольные векторы из W

Тогда сущ. и притом единственное лин. отображение f которое переводит векторы $e_1 \dots e_n$ в векторы $g_1 \, g_n$ соответственно.

Док-во. Для каждого вектора $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$

Положим $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i$

f - лин. отображение (след из лин. координат)

единственность Если f_1 - другое отображение, то

$$f_1(x) = f_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i$$

Следствие Лин. отображения равны тогда и только тогда, когда они совпадают на векторах базиса V

§2. Матрица лин. отображения

Пусть $e = (e_1 \dots e_n)$ и $f = (f_1 \dots f_m)$ - базисы пр-в V и W.

Лин. отображение φ однозначно определяется заданием векторов $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ - раскладываем по базису f

$$\varphi(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{m1} f_m$$

$$\varphi(e_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \dots + a_{m2} f_m$$

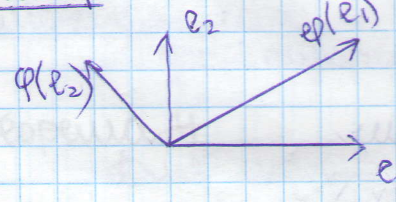
$$\vdots$$

$$\varphi(e_n) = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \dots + a_{mn} f_m$$

Матрица $[\varphi]$ наз. матрицей лин. отображения в паре базисов e и f. определена однозначно.

$$[\varphi]_{ef} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

пример



$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\varphi(e_1) = \cos\varphi \, e_1 + \sin\varphi \, e_2$

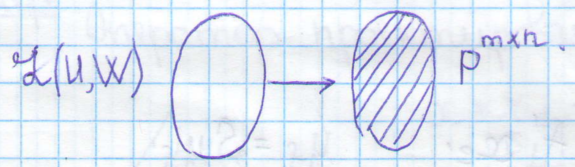
Теорема.
Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда существует взаимнооднозначное соответствие между лин. отображениями и матрицами из $P^{m\times n}$ $(P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C})$

Док-во. Построим это соответствие. Зафиксируем базисы $e=(e_1 .. e_n)$ и $f=(f_1 .. f_m)$ пространств V и W.

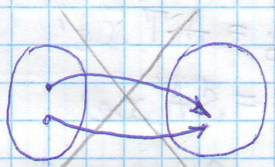
Поставим в соответствие каждому лин. отображению $\varphi: V \to W$ его матрицу $A = [e]_{ef}$

Она определена однозначно.
Это соответствие — биекция, т.к.

1. „на", т.к. любая матрица B яви. матрицей линейного отображения, переводящего вектора e_i в вектора $\sum b_{ij} f_i$



2. инъективное, т.к. разные отображения не совпадают на базисных векторах $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ имеют разные матрицы

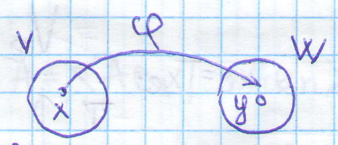


§3. Координаты вектора и его образа. Матрицы лин. отображения в разных базисах.

Пусть $\varphi: V \to W$ - линейное отображение
e, f - базисы пространств V и W.
$A = [\varphi]_{ef}$

Теорема
Если $y = \varphi(x)$, то $y_f = [\varphi]_{ef}\, x_e$; $y = A\cdot x$

Док-во. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$
разл. по координ



$[\varphi]_{ef} = A = (a_{ij})$

$$y = \varphi(x) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) \underset{\substack{\text{в силу}\\ \text{линейности } \varphi}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) f_i \qquad \Big(y = y_1 f_1 + \ldots + y_m f_m = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i\Big)$$

Теорема следует из единственности разложения вектора по базису.

Пусть e и e' – два базиса пр-ва V с матрицей перехода T

$$e' = e \cdot T$$

f и f' – два базиса пр-ва W с матрицей перехода S

$$f' = f \cdot S$$

Одному и тому же лин. отображению $\varphi: V \to W$ соответствуют матрицы

$$A = [\varphi]_{ef} \; ; \; A' = [\varphi]_{e'f'}$$

Теорема. Матрицы A и A' в различных парах базисов связаны соотношением

$$A' = S^{-1} A T$$

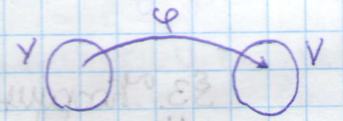
Док-во.

$$x \in V, \qquad y = \varphi(x) \in W$$

$$y_f = A x_e \qquad y_{f'} = A' x_{e'} \qquad y_f = S y_{f'}$$

$$\left.\begin{aligned} y_f &= A \cdot T x_{e'} \quad (x_e = T x_{e'}) \\ \overset{\shortparallel}{S y_{f'}} &= S A' x_{e'} \end{aligned}\right\} \; AT = SA' \Rightarrow A' = S^{-1} A T$$

Замечание: Если $\varphi: V \to V$



$$A = [\varphi]_{ee} \quad A' = [\varphi]_{e'e'}$$

$$A' = T^{-1} A T$$

Следствие 1: Матрицы лин. отображений в разных парах базисов эквивалентны

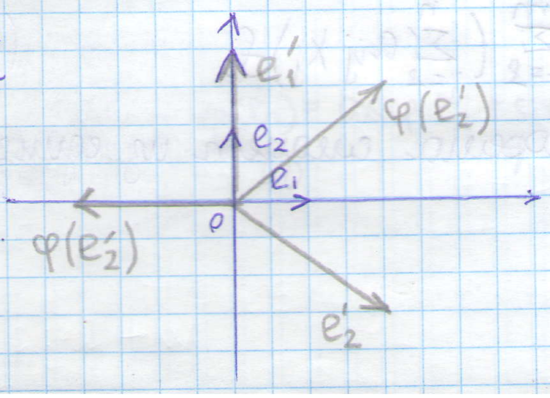
Следствие 2: Ранг матрицы лин. отображения не зависит от выбора базисов.

$$\begin{tikzcd} V_e \arrow[r, "A"] & W_f \arrow[d, "S^{-1}"] \\ V_{e'} \arrow[u, "T"] \arrow[r, "A'"] & W_{f'} \end{tikzcd} \qquad A' = S^{-1} A T$$

$x_e = T x_{e'}$

– диаграмма коммутативна

Пример Матрица поворота на $\frac{\pi}{2}$ в разных базисах.



для e_1, e_2: $A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad e_1' = 2e_2$, $\; e_2' = e_1 - e_2$

для $e_1' e_2'$: $A' \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ что геометрически

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$ - матрица перехода

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = T^{-1} A T$$

§4. Ядро и образ лин. отображения

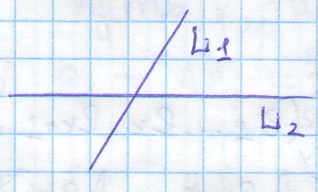
Пусть $A: V \to W$ - линейное отображение

Определение Ядро лин. отображения $\mathrm{Ker} A = \{ v \in V / f(v) = 0 \}$ (kernel)

Определение Образ лин. отображения $\mathrm{Im}\, A = \{ w \in W \mid \exists v \in V \ Av = w \}$ (image)

Пример

Оператор проектирования P



$$x = \underset{\in L_1}{x_1} + \underset{\in L_2}{x_2} \qquad Px = x_1$$

$$\mathrm{Ker} P = L_2 \qquad \mathrm{Im}\, P = L_1$$

Теорема 1.

Если A - лин. отображение, то $\mathrm{Ker} A$ и $\mathrm{Im}\, A$ - лин. подпространства

Док-во: $\mathrm{Ker} A$

Пусть $x, y \in \mathrm{Ker} A$, тогда

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y = 0 \quad \text{т.е } \alpha x + \beta y \in \mathrm{Ker} A$$

$\mathrm{Im}\, A$

Если $v_1, v_2 \in V$, то $\alpha (A v_1) + \beta (A v_2) = A(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \mathrm{Im}\, A$

т.к. $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$

$A v_1 = w_1$

$A v_2 = w_2 \qquad \alpha w_1 + \beta w_2 = A(\alpha v_1 + \beta v_2)$

Теорема 2.

Если $e_1 \dots e_n$ - базис пр-ва V, то $\mathrm{Im}\, A = \langle A e_1, \dots A e_n \rangle$

Док-во. Если $y \in \mathrm{Im}\, A$, то $y = Ax$ для некоторого вектора $x \in V$,

т.е $y = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i \in \langle A e_1 \dots A e_n \rangle$ $(\mathrm{Im}\, A \subset \langle A e_1 \dots A e_n \rangle)$

С другой стороны, если $y \in \langle A e_1 \dots A e_n \rangle$, то

$y = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = Ax \qquad (x = \sum x_i e_i)$

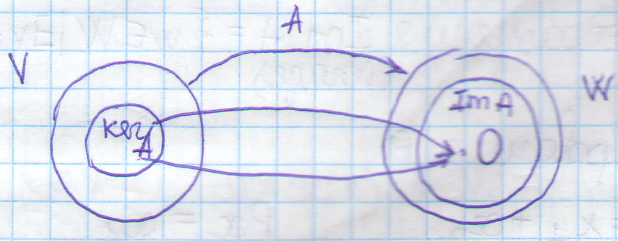
т.к $y \in \mathrm{Im}\, A$. $\qquad (\langle A e_1 \dots A e_n \rangle \subset \mathrm{Im}\, A)$

Определение Размерность подпространства $\operatorname{Im} A$ наз. рангом лин. отображение A

В силу Теоремы 2: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\langle Ae_1 \ldots Ae_n\rangle$ - не зависит от системы координат

Определение Размерность ядра A ($\dim \operatorname{Ker} A$) наз дефектом лин. отображение

Теорема 3
Пусть $A: V \to W$ - лин отображение
$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim V$$



Док-во: Пусть $e_1 \ldots e_k$ - базис $\ker A$
Дополним его до базиса V $(e_1 \ldots e_k, e_{k+1} \ldots e_n)$

$$\operatorname{Im} A = \langle \underbrace{Ae_1, Ae_2 \ldots Ae_k}_{\text{из ядра}}; Ae_{k+1} \ldots Ae_n\rangle = \langle Ae_{k+1} \ldots Ae_n\rangle$$

Покажем, что они лин. независимы.

Пусть $\alpha_{k+1} Ae_{k+1} + \ldots + \alpha_n Ae_n = 0$
$$A(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0.$$

т.е $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \ker A$

т.е лин. выражается через $e_1 \ldots e_k$ - противоречие, т.к. $(e_1 \ldots e_k, e_{k+1} \ldots e_n)$ - лин. независимы.

$\dim \ker A = k$ $\quad \dim \operatorname{Im} A = n-k.$

$$k + n - k = n = \dim V$$

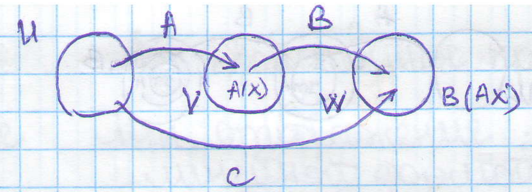
<u>Замечание</u> $\not\Rightarrow$ $V = \ker A + \operatorname{Im} A$.

<u>пример</u> D-дифференцирование многочленов
$\ker A = \langle 1\rangle$ $\qquad \operatorname{Im} D = \langle 1, t, \ldots t^{n-1}\rangle$

16.03.18.

§5. Произведение лин. отображений (умножение)

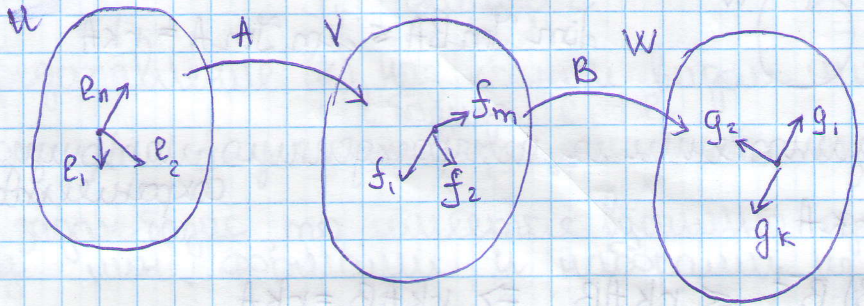
Определение Пусть U, V, W - лин. пр-ва над полем P ($P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$)
$A \in \mathcal{L}(U, V)$, $B \in \mathcal{L}(V, W)$
Произведение лин отображений A и B наз отображение C $\quad C: U \to W$
$$Cx = B(Ax) \quad \forall x \in U$$



Теорема

При умножении линейных отображений их матрицы умножаются.

Док-во:



Пусть e, f и g - базисы U, V и W.

$$A: e_j \to Ae_j = \sum_{s=1}^{m} a_{sj} f_s$$

$$B: f_s \to Bf_s = \sum_{i=1}^{k} b_{is} g_i$$

$$(BA)e_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij} g_i$$ (определение лин. отображ.)

С другой стороны:

$$BAe_j = B(Ae_j) = B\left(\sum_{s=1}^{m} a_{sj} f_s\right) \overset{\text{линейность } B}{=} \sum_{s=1}^{m} a_{sj}(Bf_s) = \sum_{s=1}^{m} a_{sj} \sum_{i=1}^{k} b_{is} g_i = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}\right) g_i$$

$$\begin{tikzcd} X_{e'} \arrow[r, "A'"] \arrow[d, "T"'] & Y_{f'} \\ X_e \arrow[r, "A"] & Y_f \arrow[u, "S^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$x_e = Tx_{e'}$

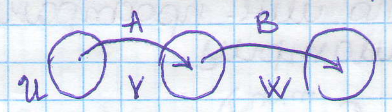
$y_f = Sy_{f'}$

диаграмма коммутативна

$A' = S^{-1}AT$

Утв (о ранге произведения матриц)

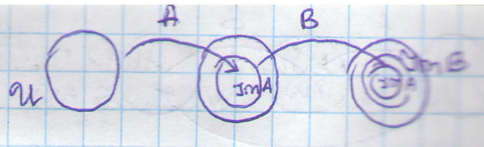
Пусть A, B - лин. отображение



Тогда $rk(BA) \leq \min rk(A, B)$

Док-во 1. $rk B = \dim Im B$

$\operatorname{Im} BA \subset \operatorname{Im} B$

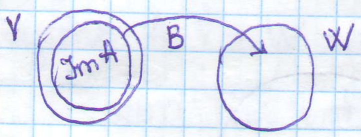


$\dim \operatorname{Im} BA \leq \dim \operatorname{Im} B = rk\, B$

2. $\operatorname{Im} BA = B(\operatorname{Im} A)$

для произвольного отображения C

$\dim \operatorname{Im} C \leq \dim V$



$\dim \operatorname{Im} BA \leq \dim \operatorname{Im} A = rk\, A$

<u>Следствие</u>: при умножении на невырожденную матрицу ранг сохраняется

$rk(AB) \leq rk\, A$

$rk(A) = rk(AB)B^{-1} \leq rk\, AB \Rightarrow rk\, AB = rk\, A$.

§6. Линейное пространство линейных отображений.

$\mathcal{L}(V,W)$ - множество лин. отображений из V в W.

Определение Суммой лин. отображений $A, B \in \mathcal{L}(V,W)$ наз. отображение $C: V \to W$

$$Cx = Ax + Bx \quad \forall x \in V$$

Обозначение: $C = A + B$.

Определение Произведением лин. отображение A на число $\alpha \in P$ наз. отображение $C: V \to W$

$Cx = \alpha Ax$ Обозначение: $C = \alpha A$.

Теорема 1
Для любых отображений $A, B \in \mathcal{L}(V,W)$ и любого числа $\alpha \in P$ $A+B \in \mathcal{L}(V,W)$ и $\alpha A \in \mathcal{L}(V,W)$

Теорема 2
Множество $\mathcal{L}(V,W)$ - линейное пр-во над P отн. введенных операций.

Док-во. проверить свойства лин. пространства

Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то лин. пространство $\mathcal{L}(V,V)$ изоморфно пространству матриц
$P^{m\times n}$ ($\mathbb{R}^{m\times n}$ или $\mathbb{C}^{m\times n}$)

Зафиксируем базисы e и f пр-в V и W

$\varphi: \mathcal{L}(V,W) \to P^{m\times n}$ $\quad \varphi(A) = A_{fe}$

Это изоморфизм вз-одн. лин. $(A+B)_{fe} = A_{fe} + B_{fe}$; $(\alpha A)_{fe} = \alpha A_{fe}$

§7. Двойственное пространство

Определение Лин. отображение $f: V \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) наз. линейной формой или лин. функционалом в пр. V

Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис V.
Тогда если $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, то

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n \quad (*)$$

f_i - скаляры

Представление $(*)$ наз. общим видом лин. функционала в базисе $e_1 \dots e_n$
Числа $f_1 \dots f_n$ наз. коэффициентами лин. формы

Если задан базис, то имеется взаимно-однозначное соответствие между лин. формами и наборами из n чисел $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$

Пусть $e' = (e_1' \dots e_n')$ - другой базис V, $e' = eT$

$$f_j' = f(e_j') = f(t_{1j} e_1 + t_{2j} e_2 + \dots + t_{nj} e_n) = t_{1j} f(e_1) + \dots + t_{nj} f(e_n) =$$
$$= t_{1j} f_1 + t_{2j} f_2 + \dots + t_{nj} f_n.$$

$$[f_1' \dots f_n'] = [f_1 \dots f_n] T$$

Базисные векторы и коэф. линейной формы при замене базиса меняются по одним и тем же формулам (согласовано, когредиентно)

Определение Пусть f и g - линейные формы

$$(\alpha f + \beta g) \overset{def}{=} \alpha f(x) + \beta g(x)$$

тоже лин. форма — образуют лин. пр-во.

Определение Лин. пространство всех лин. форм на V наз. сопряженным (двойственным) к пр-ву V

Обозначение: V^* (V')

$$\dim V^* = \dim V$$

<u>Замечание:</u> при одновременном рассмотрении V и V^* элементы V^* наз ковариантными векторами, а элементы V наз контрвариантными векторами.

Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис V
Рассмотрим лин. функционалы $e^1 \dots e^n$, для которых

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

например: $e^1(e_1) = 1$, $e^1(e_2) = 0$, $e^1(e_n) = 0$